# Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

### *6 клас*

1. Знайти простий спосіб обчислення і використати його для обчислення суми:
$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}$$

2. У родині 4 особи. Якщо Марійці підвищити стипендію удвічі, то загальний прибуток усієї родини зросте на 5%, якщо замість цього мамі підвищити зарплату удвічі, то – на 15%, а якщо ж підвищити удвічі зарплату татові, то – на 25%. На скільки відсотків зросте прибуток усієї родини, якщо підвищити удвічі пенсію дідусеві?

3. У трьох скриньках лежать горіхи. У першій скриньці горіхів на 6 менше, ніж у двох інших разом, а в другій – на 10 менше, ніж у першій і третій разом. Скільки горіхів у третій скриньці ?

4. Вася задумав число і поділив його на 100. У результаті вийшло число на 34,65 менше задуманого. Яке число задумав Вася?

5. Як потрібно розрізати прямокутник із сторонами 16 см і 9 см на дві частини так, щоб з цих частин можна було б скласти квадрат ?

*На виконання роботи виділяється 4 години.*
*Використання записників і калькулятора не дозволяється.*

**Завдання ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

***7 клас***

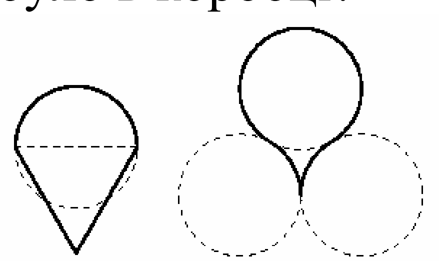
1. Знайдіть чотиризначне число, у якого сума перших трьох цифр дорівнює 19, а сума останніх трьох цифр дорівнює 27.

2. Папа Карло змайстрував Буратіно за 5 днів. На скільки відсотків він повинен підвищити продуктивність своєї праці, щоб на створення Буратіно пішло 4 дні?

3. Між містами $A$ і $B$ по гірській дорозі через перевал регулярно ходить автобус. Підчас підйому на перевал він їде зі швидкістю 25 *км/год*, а під час спуску – 50 *км/год*. Час його руху від $A$ до $B$ – 3,5 години, а від $B$ до $A$ – 4 години. Знайдіть відстань від $A$ до $B$.

4. Наталя та Інна купили однакові коробки чаю в пакетиках. Відомо, що одного пакетика вистачає на дві або три чашки чаю. Наталі вистачило пакетіків із коробки лише на 41 чашку чаю, а Інні – лише на 58 чашок чаю. Скільки пакетиків чаю було в коробці?

5. Іванко і Петрик на уроці креслення намалювали пуголовків (чотири кола на малюнку – одного радіуса, трикутник – рівносторонній, горизонтальна сторона цього трикутника – діаметр кола). Який з пуголовків має більшу площу?



*На виконання роботи виділяється 4 години.*
*Використання записників і калькулятора не дозволяється.*

# Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

## *8 клас*

1. Розв'яжіть рівняння $a^2x-3=a+9x$ для всіх значень параметра $a$.

2. Знайдіть найбільше значення виразу $xy$, якщо відомо, що $x+2y=1$.

3. Вітя, Антон та Сергійко грали сніговими кульками. Першу снігову кульку кинув Антон. Потім у відповідь на кожну кульку, що в нього влучила, Вітя кидав 6 кульок, Сергійко – 5 кульок, а Антон – 4 кульки . Через деякий час гру було закінчено. Знайдіть, в кого скільки снігових кульок влучно, якщо повз ціль пролетіли 13 кульок. (У себе самого сніговими кульками не кидаються).

4. Придумайте таке десятизначне число, у записі якого немає нулів, щоб при додаванні до нього добутку його цифр було отримано число з таким самим добутком цифр.

5. У трикутнику $ABC$ на сторонах $AC$ і $BC$ взяті такі точки $X$ і $Y$, що $\angle ABX=\angle YAC$, $\angle AYB=\angle BXC$, $XC=YB$. Знайдіть кути трикутника $ABC$.

*На виконання роботи виділяється 4 години.*
*Використання записників і калькулятора не дозволяється.*

**Завдання ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

***9 клас***

1. Розв'яжіть рівняння $|x+4|+|x|+|x-4|=8-x^2$.

2. Знайдіть значення $x$, при якому функція $y=(x-a)^2+(x-b)^2$ набуває свого найменшого значення.

3. Добуток п'яти чисел не дорівнює нулю. Кожне з цих чисел зменшили на одиницю, при цьому їх добуток не змінився. Наведіть хоча б один приклад.

4. У магазині три поверхи, переміщуватися між якими можна тільки ліфтом. Дослідження відвідуваності поверхів магазину показало, що з початку робочого дня і до закриття магазину:
   а) з покупців, що входять у ліфт на другому поверсі, половина їде на перший поверх, а половина – на третій;
   б) серед покупців, які виходять з ліфта на третьому поверсі, менше третини.
   На який поверх покупці частіше їздили з першого поверху, на другий чи на третій?

5. У коло вписаний прямокутний трикутник $ABC$ з гіпотенузою $AB$. Нехай $K$ – середина дуги $BC$, що не містить точку $A$; $N$ – середина відрізка $AC$, $M$ – точка перетину променя $KN$ з колом. У точках $A$ і $C$ проведені дотичні до кола, які перетинаються в точці $E$. Доведіть, що $\angle EMK=90^\circ$.

*На виконання роботи виділяється 4 години.*
*Використання записників і калькулятора не дозволяється.*

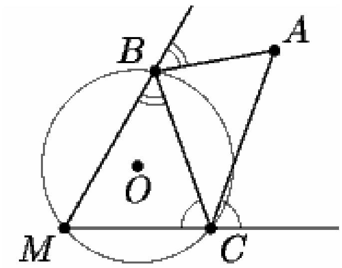
**Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

***10 клас***

1. Розв’яжіть рівняння $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}$ для всіх значень параметра $a$.

2. У деяких країнах сумарна зарплата 10% найбільш високооплачуваних працівників становить 90% зарплати всіх працівників. Чи може так бути, що в кожному з регіонів, на які ділиться ця країна, зарплата будь-яких 10% працівників становить не більше 11% всієї зарплати, що виплачується в цьому регіоні?

3. Побудуйте графік функції $y=x^3(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1})$.




4. У ряд записані числа від 1 до 2000. Двоє гравців роблять ходи по черзі. За один хід дозволяється викреслити будь-яке із записаних чисел разом з усіма його дільниками. Виграє той, хто закреслить останнє число. Доведіть, що у першого гравця є спосіб грати так, щоб завжди вигравати.

5. Усередині кута з вершиною $M$ позначена точка $A$. З цієї точки випустили кульку, яка відбилася від однієї сторони кута в точці $B$, потім від іншої сторони в точці $C$ і повернулась у точку $A$ («кут падіння» дорівнює «куту відбиття»). Доведіть, що точка $O$ – центр кола, описаного навколо трикутника $BCM$, лежить на прямій $AM$.

*На виконання роботи виділяється 4 години.*
*Використання записників і калькулятора не дозволяється.*

# Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

## *11 клас*

1. Розв'яжіть рівняння для всіх значень параметра $a$ $\sin^2 x-(2a+1)\sin x+a^2+a=0$ .

2. Чи існують три квадратних тричлена, такі що кожен з них має два різних дійсних кореня, а сума будь-яких двох тричленів не має дійсних коренів?

3. Чи може сума 1000 послідовних непарних чисел бути сьомим степенем натурального числа? Відповідь обґрунтуйте.

4. Знайдіть найменшу відстань між точками прямої $y = x - 1$ і параболи $y = x^2$.

5. По ребрах опуклого многогранника з 2011 вершинами проведена замкнена ламана, що проходить через кожну вершину рівно один раз. Доведіть, що в кожній з частин, на які ця ламана ділить поверхню многогранника, кількість граней з непарним числом сторін – непарна.

*На виконання роботи виділяється 4 години.*
*Використання записників і калькулятора не дозволяється.*